

Cálculo de estructuras con SAP2000

ANEXO.

MEF vs Matricial.





# ÍNDICE

ÍNDICE .....	3
1. Fundamento matemático del MEF .....	4
1.1. Principio de los trabajos virtuales. ....	7
1.2. Ejemplo práctico.....	9

# AMEXO. MEF vs Matricial

## 1. Fundamento matemático del MEF

Debido a que el software SAP2000 nos ahorra el conocimiento y desarrollo de los métodos matemáticos en el análisis estructural (aunque siempre es recomendable tener las nociones mínimas del álgebra tensorial y excelsas de la resistencia de materiales) se expone de manera sucinta la base teórica el Método de Elementos Finitos, adjuntando las ecuaciones básicas que el programa informático implementa en sus cálculos internos.

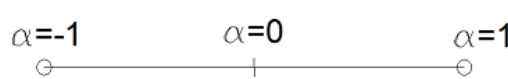
Inicialmente se genera un modelo del elemento en análisis en dos o tres dimensiones.

Cada elemento, en función de sus características geométricas se divide en tramos lineales, polígonos superficiales o figuras volumétricas.

### a) Elementos lineales

Los elementos lineales se representan en barras definidas por sus nudos inicial y final.

Las barras presentan 3 funciones de forma  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$ . Las características mecánicas del elemento se integran de forma numérica mediante la siguiente expresión.



The diagram shows a horizontal line representing a linear element. Three nodes are marked with circles: the left node is labeled  $\alpha = -1$ , the middle node is labeled  $\alpha = 0$ , and the right node is labeled  $\alpha = 1$ .

$$n_1 = -\frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha) \cdot \alpha$$
$$N_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha) \cdot \alpha$$
$$N_3 = 1 - \alpha^2$$

Integración en dominios lineales

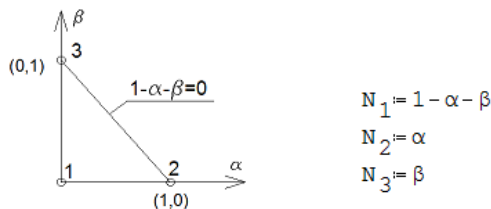
$$\int_{-1}^1 f(L_1) dL_1 = \sum_{i=1}^k f(L_1) w_p$$

**b) Elementos superficiales**

La forma del polígono o del poliedro se determina por su mejor adaptación a las formas de la pieza. Las formas triangulares son más versátiles en la discretización de las geometrías complejas, sin embargo, las formas rectangulares son más precisas para un mismo número de grados de libertad.

En una discretización de una pieza plana, son usuales los polígonos triangulares y rectangulares.

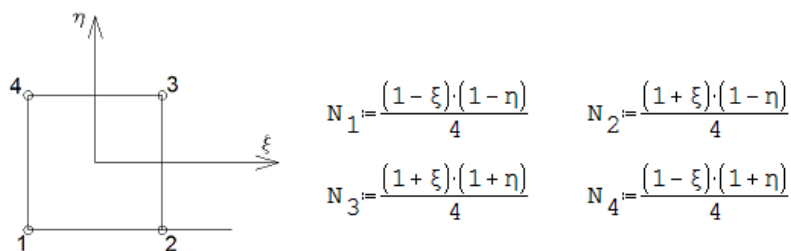
Los triángulos presentan 3 nodos y 3 funciones de forma  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$ . Las características mecánicas del elemento se integran de forma numérica mediante la siguiente expresión.



Integración en dominios triangulares

$$\int_0^{1-L_3} \int_0^{1-L_3-L_2} f(L_1, L_2, L_3) dL_2 dL_3 = \sum_{i=p} f(L_{1p}, L_{2p}, L_{3p}) w_p$$

Los cuadriláteros presentan 4 nodos y 4 funciones de forma  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  y  $N_4$ . La forma del elemento se integra de forma numérica mediante la siguiente expresión.



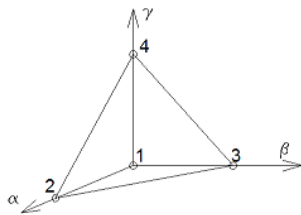
Integración en dominios cuadriláteros

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q g(\xi_m, \eta_n) w_m \cdot w_n$$

c) Elementos volumétricos

En cuanto a los elementos volumétricos contamos con una situación análoga, regida por las siguientes expresiones:

Elemento tetraédrico:

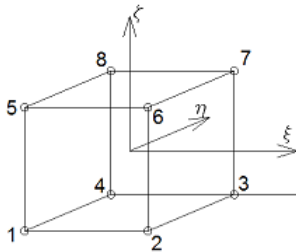


$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \alpha - \beta \\ N_2 &= \alpha \\ N_3 &= \beta \\ N_4 &= \gamma \end{aligned}$$

Integración en dominios tetraédricos

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} f(L_1, L_2, L_3, L_4) dL_1 dL_2 dL_3 = \sum_{i=p} f(L_{1p}, L_{2p}, L_{3p}, L_{4p}) w_p$$

Elemento hexaédrico:



$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} & N_5 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8} \\ N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} & N_6 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} & N_7 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \\ N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} & N_8 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \end{aligned}$$

Integración en dominios hexaédricos

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q \sum_{\tilde{n}=1}^r g(\xi_m, \eta_n, \zeta_{\tilde{n}}) w_m \cdot w_n \cdot w_{\tilde{n}}$$

## 1.1. Principio de los trabajos virtuales.

Una vez realizada la discretización geométrica de cada porción de la pieza se procede al análisis de cada una de ellas en el campo de los desplazamientos de nudos, en el campo de las deformaciones y en el campo de las tensiones.

Este análisis se lleva a cabo mediante el principio de los trabajos virtuales, cuya operación relaciona los desplazamientos, las deformaciones y las tensiones del elemento con el conjunto de las cargas superficiales, cargas en contornos y cargas en los nodos.

De esta forma, interactuando cada elemento de la malla con sus contiguos, se obtiene el equilibrio de fuerzas actuantes.

El principio de los trabajos virtuales enuncia que el trabajo realizado por las fuerzas interiores ha de ser igual que el trabajo que transmiten las cargas exteriores y se puede formular de forma sencilla para una barra sometida a tracción pura con las siguientes expresiones:

Trabajo de las fuerzas interiores

$$\int_L \frac{\delta u}{dx} \cdot E \cdot \frac{du}{dx} \cdot A dx$$

Trabajo de las fuerzas exteriores

$$\int_L \delta u \cdot b(x) dx + \sum_{i=1}^n \delta u_i \cdot P_i$$

Se deduce, relacionando los desplazamientos de los nudos con la rigidez axial de la barra y la carga aplicada, que las deformaciones son proporcionales a la carga aplicada (siempre que se permanezca en el dominio elástico).

$$u(x) = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2 \quad \begin{cases} \delta u = N_1 \cdot \delta u_1 + N_2 \cdot \delta u_2 \\ \frac{\delta u}{dx} = \frac{dN_1}{dx} \cdot \delta u_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot \delta u_2 \end{cases}$$

$$\int_L \left( \frac{dN_1}{dx} \cdot E \cdot A \cdot \frac{dN_1}{dx} \cdot u_1 + \frac{dN_1}{dx} \cdot E \cdot A \cdot \frac{dN_2}{dx} \cdot u_2 \right) dx = \int_L N_1 \cdot b(x) dx + P_1$$

$$\int_L \left( \frac{dN_2}{dx} \cdot E \cdot A \cdot \frac{dN_1}{dx} \cdot u_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot E \cdot A \cdot \frac{dN_2}{dx} \cdot u_2 \right) dx = \int_L N_2 \cdot b(x) dx + P_2$$

$$[K] \cdot \{a\} = \{F_{\text{barra}}\} + \{F_{\text{nudo}}\}$$

Llegando a la expresión que nos permite realizar los cálculos matriciales de primer orden para estructuras de elementos barra:

$$\{P\} = [K] * \{d\}$$

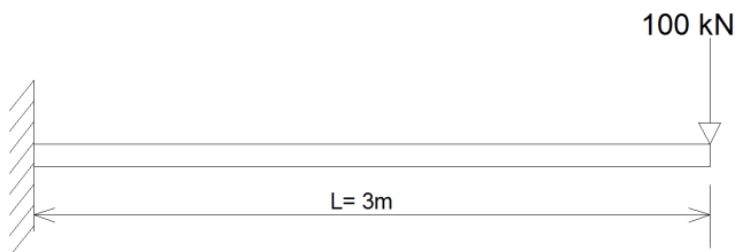


## 1.2. Ejemplo práctico.

Para comprender la dinámica del MEF, hagamos un pequeño ejercicio de aplicación del método matricial aplicado a una barra ménsula con una carga en su extremo. Este problema se resolvería de forma directa mediante el equilibrio isostático, sin embargo lo compararemos con dos modelos diferentes, por un lado resolveremos la estructura con el método matricial, fragmentando el elemento barra en tres tramos, unidos entre sí solidariamente. Por otro lado resolveremos este problema con ayuda del SAP2000 de nuevo dividiendo la barra en 3 partes iguales.

Los datos de partida son:

- Barra empotrada en un extremo y libre en el otro.
- La barra mide 3 metros de longitud y se divide en tramos de 1 metro.
- Se aplica una carga descendente de 100kN en el extremo libre.
- Se predimensiona la barra con un perfil de acero normalizado tipo IPE200 cuyo  $E \cdot I = 4080.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ .



### a) Elementos lineales

El cálculo manual directo sugiere acudir a las tablas de vigas, obteniendo la siguiente formulación:

$$\text{Momento de empotramiento: } M_{\max} = P \cdot L = 100 \cdot 3 = \underline{300 \text{ kN} \cdot \text{m}}$$

$$\text{Esfuerzo cortante: } V_{\max} = P = \underline{100 \text{ kN}}$$

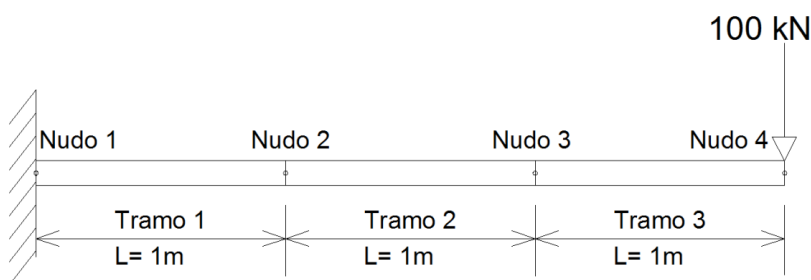
$$\text{Flecha en extremo libre: } f_{\max} = P \cdot L^3 / 3EI = 100 \cdot 3^3 / 3 \cdot 4080.5 = \underline{0.220 \text{ m}}$$

El descenso del extremo de la viga es de 22cm, lo que, en caso de dimensionamiento real supondría una deformación excesiva y habría que probar con un perfil más grande. Para nuestro experimento nos vale.

### b) Cálculo matricial

Ahora hacemos un cálculo matricial con ayuda de una hoja de cálculo. Lo lógico sería considerar la barra completa de 3 m como una única unidad, de donde se desprenderían los desplazamientos y esfuerzos en ambos extremos de la barra y posteriormente, por equilibrio de fuerzas, podríamos conocer los valores en cada sección de la viga.

Pero en este caso vamos a dividir la barra en tres tramos iguales de 1m, simulando la descomposición que hace el MEF de la pieza en elementos finitos. El modelo matricial se multiplica ya que en lugar de 1 barra, tendremos 3 idénticas unidas rígidamente y por tanto el cálculo computará la interacción entre ellas y los resultados matriciales arrojarán los desplazamientos y esfuerzos no solo de los extremos de la ménsula, sino también de los dos nuevos nudos intermedios, conociendo directamente el estado tensional y de deformaciones de cada uno de estos 4 nudos.



Sea la matriz de rigidez de una barra:

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

KTramo1= KTramo2= KTramo3

$$K = \begin{bmatrix} 598500 & 0 & 0 & -598500 & 0 & 0 \\ 0 & 48963.6 & 24481.8 & 0 & -48964 & 24481.8 \\ 0 & 24481.8 & 16321.2 & 0 & -24482 & 8160.6 \\ -598500 & 0 & 0 & 598500 & 0 & 0 \\ 0 & -48964 & -24482 & 0 & 48963.6 & -24482 \\ 0 & 24481.8 & 8160.6 & 0 & -24482 & 16321.2 \end{bmatrix}$$

La matriz ensamblada quedaría de la siguiente manera:

$$K = \begin{array}{c|ccc|} K_{11a} & & K_{12a} & \\ K_{21a} & K_{22a}+K_{11b} & K_{12b} & \\ & K_{21b} & K_{22b}+K_{11c} & K_{12c} \\ & & K_{21c} & K_{22c} \end{array}$$

$$K = \begin{array}{c|cccccccccccc|} 598500 & 0 & 0 & -598500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48964 & 24482 & 0 & -48964 & 24482 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24482 & 16321 & 0 & -24482 & 8161 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -598500 & 0 & 0 & 1197000 & 0 & 0 & -598500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -48964 & -24482 & 0 & 97927 & 0 & 0 & -48964 & 24482 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24482 & 8161 & 0 & 0 & 32642 & 0 & -24482 & 8161 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -598500 & 0 & 0 & 1197000 & 0 & 0 & -598500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -48964 & -24482 & 0 & 97927 & 0 & 0 & -48964 & 24482 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24482 & 8161 & 0 & 0 & 32642 & 0 & -24482 & 8161 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -598500 & 0 & 0 & 598500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -48964 & -24482 & 0 & 48964 & -24482 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24482 & 8161 & 0 & -24482 & 16321 \end{array}$$

Los vectores de carga y de desplazamiento se formarían de la siguiente manera:

Vector de cargas

$R_{x1}$
$R_{y1}$
$M_1$
0
0
0
0
0
0
0
0
100
0

Vector de desplazamientos

$U_1$	0
$V_1$	0
$W_1$	0
$U_2$	$U_2$
$V_2$	$V_2$
$W_2$	$W_2$
$U_3$	$U_3$
$V_3$	$V_3$
$W_3$	$W_3$
$U_4$	$U_4$
$V_4$	$V_4$
$W_4$	$W_4$

Los desplazamientos  $U_1$ ,  $V_1$  y el giro en  $W_1$  quedan restringidos debido al empotramiento en el extremo inicial.

Por lo tanto eliminaríamos las tres primeras filas y columnas de la matriz de rigidez  $K$  para obtener el valor de los desplazamientos y giros en cada nudo.

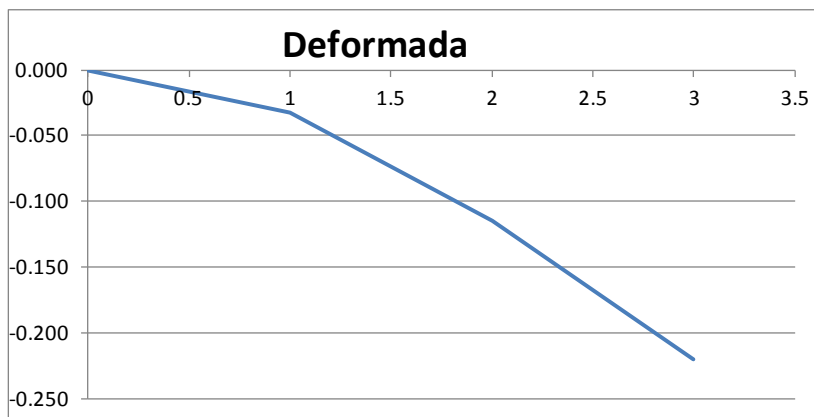
Resolvemos el sistema haciendo la inversa de la matriz  $K$  resultante:

$$\{d\} = [K]^{-1} * \{P\}$$

Los desplazamientos obtenidos son:

$U_1$	0	m
$V_1$	0	m
$W_1$	0	Rad
$U_2$	0	m
$V_2$	0.0327	m
$W_2$	0.0613	Rad
$U_3$	0	m
$V_3$	0.1144	m
$W_3$	0.098	Rad
$U_4$	0	m
$V_4$	0.2206	m
$W_4$	0.1103	Rad

Con estos datos, la deformada de la viga presenta el esquema siguiente desarrollo:



Conocidos los desplazamientos verticales de los 4 nudos se han representado en una línea quebrada asumiendo que se trata de la tendencia lineal de la curva real de la elástica que en este caso sería de tercer grado.

Se observa un valor del descenso en el extremo libre de 0.2206m, igual al obtenido en el cálculo manual anterior.

Continuando con el proceso del cálculo matricial, se obtendría los valores de esfuerzos en cada uno de los 3 tramos o elementos finitos en los que se ha dividido la ménsula, obteniendo:

#### Tramo 1

$R_{x1}$	=	0.000 kN
$R_{y1}$	=	-100.000 kN
$M_1$	=	-300.000 kNm
$R_{x2}$	=	0.000 kN
$R_{y2}$	=	100.000 kN
$M_2$	=	200.000 kNm

#### Tramo 2

$R_{x2}$	=	0.000 kN
$R_{y2}$	=	-100.000 kN
$M_2$	=	-200.000 kNm
$R_{x3}$	=	0.000 kN
$R_{y3}$	=	100.000 kN
$M_3$	=	100.000 kNm

### Tramo 3

$R_{x3}$	=	0.000	kN
$R_{y3}$		-100.000	kN
$M_3$		-100.000	kNm
$R_{x4}$		0.000	kN
$R_{y4}$		0.000	kN
$M_4$		0.000	kNm

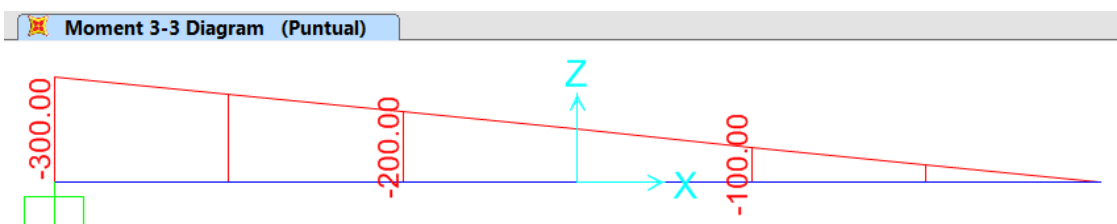
Se aprecia como los valores de  $M_1$  y  $R_{y1}$  coinciden con los Máximos momentos y cortantes deducidos de las fórmulas iniciales.

Asimismo, en cada nudo, los esfuerzos que llegan de cada una de las barras se compensan entre sí, manifestándose el equilibrio de fuerzas en nudos y cumpliéndose el Principio de los Trabajos Virtuales que rezaba en los párrafos anteriores “el trabajo desarrollado internamente en cada elemento ha de ser igual al trabajo que recibe de fuera”.

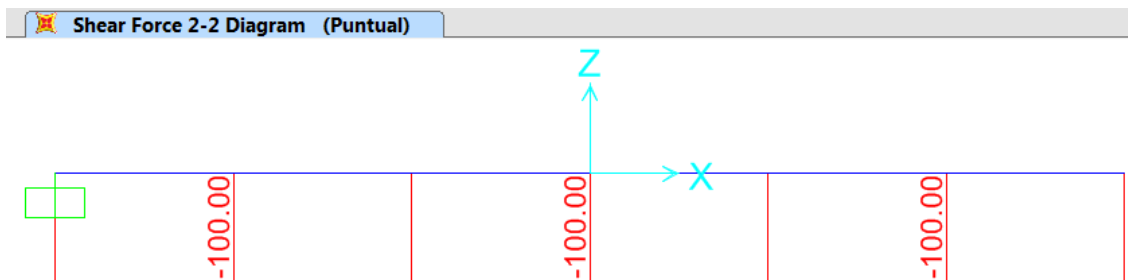
### c) Cálculo con SAP2000

Por último, como justificación del anterior análisis en el estudio del SAP2000 como software especializado en el MEF, haremos un análisis de la ménsula anterior en el propio programa y compararemos con los resultados ya obtenidos.

- Ley de momentos flectores (gráfico de resultados SAP2000):

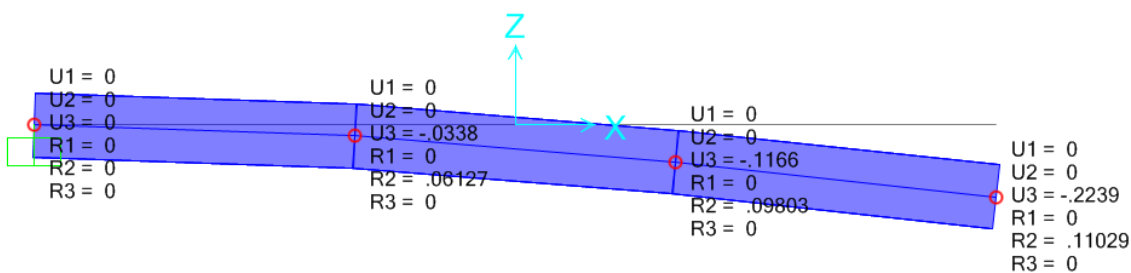


- Ley de esfuerzos cortantes (gráfico de resultados SAP2000):



Tanto momentos como cortantes coinciden con los valores extraídos en el cálculo matricial.

- Deformada de la pieza (gráfico de resultados SAP2000, descenso de los nudos en metros):



#### d) Comparativa

Comparando estos valores con los obtenidos en el cálculo matricial:

	Matricial	SAP2000
Nudo 1	0.000	0.000
Nudo 2	-0.033	-0.034
Nudo 3	-0.114	-0.117
Nudo 4	-0.221	-0.224

Observamos que hay una ligera diferencia de entorno al 2% en los resultados de los desplazamientos en uno y otro análisis. Esto se debe al propio método computacional del software que, como ya vimos, integra por aproximación usando métodos numéricos.

Además el programa no sólo tiene en cuenta la rigidez a flexión en un plano ( $E \cdot I_x$ ) sino que además implementa otras variables mecánicas en el cálculo como son Módulo de Poisson, Rigidez transversal, etc.